Equação de Onda

Supondo meio isotrópico, linear, sem correntes e cargas:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4)$$

onde $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ e $\bar{B} = \mu \bar{H}$

ϵ = permissividade elétrica

μ = permeabilidade magnética

Primeiro, aplique o rotacional nos dois lados de (1):

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H}) \quad (5)$$

observe q/ o lado direito de (5) pode ser expandido c/ o auxílio de (2):

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}\right) \quad (6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (7)$$

O lado esquerdo de (7) pode ser expandido por meio de uma identidade vetorial bem conhecida:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 E \quad (8)$$

de (3) $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot \epsilon \bar{E} = \epsilon \nabla \cdot \bar{E} = 0$ (9)

Usando (9) em (8):

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E} = \epsilon \mu \frac{\delta^2 \bar{E}}{\delta t^2}} \quad (10)$$

A eq. (10) é a equação de onda p/ campo elétrico.

Uma equação similar pode ser encontrada p/ campo magnético.
Para isso:

Aplique o rotacional nos dois lados de (2):

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \epsilon \frac{\delta}{\delta t} (\nabla \times \bar{E}) \quad (11)$$

substituindo (1) e $\bar{B} = \mu \bar{H}$ em (11):

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \epsilon \frac{\delta}{\delta t} \left(-\mu \frac{\delta H}{\delta t} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = -\mu \epsilon \frac{\delta^2 \bar{H}}{\delta t^2} \quad (12)$$

Identidade vetorial : $\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H}$

de (4) : $\nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot (\mu \bar{H}) = \mu \nabla \cdot \bar{H} = 0$

$$-\nabla^2 \bar{H} = -\mu \epsilon \frac{\delta^2 \bar{H}}{\delta t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \bar{H} = \mu \epsilon \frac{\delta^2 \bar{H}}{\delta t^2}} \quad (13)$$

equação de onda p/ campo magnético.

Derivar as equações de Helmholtz p/ polarizações TE e TM.